ЛЕКЦИЯ-4

§5.Ауыспалы таңбалы қатарлар.Лейбниц белгісі

Егер қатар мүшелерінің таңбалары бірде оң, бірде теріс болып немесе екі көрші тұрған қатар мүшелерінің таңбалары қарама-қарсы болса, ондай қатарды ауыспалы таңбалы қатар деп атайды.

Ыңғайлы болуы үшін қатардың бірінші мүшесінің таңбасы оң болсын дейік

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots \quad . \qquad (1)$$

Теорема. Ауыспалы таңбалы қатар мүшелері абсолюттік шамасы бойынша монотонды кемімелі:

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots > a_n > \ldots \quad .$$

және $n \to \infty$ жалпы мүшесінің шегі нөлге тең болса

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

онда (1) қатар жинақты.

Дәлелдеуі. (1) қатардың алғашқы $2n$ мүшелерінің қосындысын S_{2n} деп белгілейік. Сонда

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}). \qquad (2)$$

Теорема шарты бойынша кемімелі болғандықтан, жақшалардың ішіндегі айырмалардың таңбалары оң сондықтан

$$S_{2n} \geq 0 \quad .$$

Енді (2) қосындыны басқаша жазайық:

$$S_{2n} = a_1 - \left[(a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \ldots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) + a_{2n}\right] \qquad (2')$$

Бұл өрнектен кез келген n нөмірі үшін

$$S_{2n} \leq a_1$$

теңсіздікті аламыз.

Сонымен, жұп дербес қосындылар тізбегі $\{S_n\}$ кемімейтін және жоғарғы жағынан шектеулі, монотонды тізбек шегі туралы теорема бойынша тізбек жинақты

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S\,.$$

Енді мүшелер саны тақ болғандағы дербес қосындыны қарастырайық

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \quad .$$

Осы өрнекте шекке өтеміз:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$$

себебі, теорема шарты бойынша

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0\,.$$

Сонымен,

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S,$$

демек (1) қатар жинақты.

Теорема дәлелденді.

Теорема дәлелдеуінде қатар мүшелерінің сандары жұп болғанда, дербес қосындылар тізбегі $\{S_{2n}\}$ кемімейтін тізбек S қосындысына жинақты, ал тізбек мүшелері саны тақ болғанда, $\{S_{2n+1}\}$ өспейтін тізбекте S қосындысына жинақты болатынын байқадық.

Олай болса,

$$S_{2n} < S < S_{2n-1} < a_1$$

немесе

$$0 < S < a_1\,.$$

Бұл теңсіздік ауыспалы қатар қосындысын оның дербес қосындысымен ауыстырып есептегендегі жіберілген қатені бағалауға мүмкіндік береді.

(1) қатардың қалдық мүшесін r_n белгілейік, онда

$$r_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n+2} + \dots$$

және жоғарыдағы теңсіздік бойынша

$$0 < r_{2n} < a_{2n+1}.$$

Керсінше,

$$r_{2n-1} = -a_{2n} + a_{2n+1} - \dots = -(a_{2n} - a_{2n+1} + \dots)$$

және

$$r_{2n-1} < 0,\ |r_{2n-1}| < a_{2n}.$$

Сонымен, ауыспалы таңбалы қатар қосындысын оның дербес қосындысымен алмастырғандағы жіберілген қатенің таңбасы қатардағы қалдырып жазған бірінші мүшенің таңбасындай және оның абсолюттік шамасынан артпайды.

§6. Абсолютті және шартты жинақты қатарлар

Осыған дейін мүшелері оң немесе ауыспалы таңбалы қатарларды қарастырдық.

Енді таңбалары әртүрлі оң да, теріс те болатын қатарларды қарастырайық. Оларды келесі түрде жазайық

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + \dots \qquad (1)$$

мұндағы $a_1, a_2, a_3, \dots a_k, \dots$ кез келген таңбалы нақты сандар, оң және теріс мүшелерінің сандары шексіз деп ұйғарамыз.

Сонымен бірге (1) қатар мүшелерінің абсолюттік шамаларынан қатар құрамыз:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| + \dots \qquad (2)$$

Анықтама. Егер (2) жинақты болса, онда (1) қатарды абсолютті жинақты деп, ал (1) жинақты, (2) жинақсыз болса, онда (1) қатарды шартты жинақты деп атайды.

Теорема. Егер абсолюттік шамасы бойынша түзілген (2) қатар жинақты болса, онда (1) қатар да жинақты.